

Πολυώνυμα:

πίφα $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ αν $f(p) = 0$

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow (x-p) \mid f(x)$$

$p(x)$ αάγμο αν $p(x) = f(x)g(x) \Rightarrow f(x)$ σταθερό ή $g(x)$ σταθερό

$f(x) = c \cdot p_1(x) \dots p_s(x)$ γάρια αάγμων μονικών πολυωνύμων.

στο $\mathbb{C}[x]$ όλα τα αάγμο πολυώνυμα τις κορφές $x-p$.

Αν έχω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ τότε μπορώ πάντα να το γράψω

$$f(x) = c \cdot (x-p_1)(x-p_2) \dots (x-p_n)$$

$$n = \deg f.$$

Αν η ίδια πίφα εμφανίζεται πολλές φορές το $f(x)$ παίρνει την κορφή, δηλ. $\xi_i \neq \xi_j$ πίφες το f

$$F = c \cdot (x-\xi_1)^{\lambda_1} (x-\xi_2)^{\lambda_2} \dots (x-\xi_t)^{\lambda_t}$$

τα $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ λέγονται πολλαπλότητες τις πίφες ξ_i , εφόσον τα $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ α πίφες παρομένων n τότε $\lambda_1 + \dots + \lambda_t = n$.

Στο $\mathbb{R}[x]$ όλα τα αάγμο μονικά πολυώνυμα είναι τις κορφές $x-p$, $x^2 + \beta x + \gamma$ με διακρίνωσα $\Delta < 0$ για να είναι μονικά!

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x] \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

Θεώρημα: Αν $p = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ είναι πίφα του $f(x)$, που έχω αάγμωντες, $u, \lambda \in \mathbb{Z}$ $(k, \lambda) = 1$, τότε ο αριθμητής διαιρεί το σταθερό όρο (c) , ενώ ο παρονομαστής το μεγαλύτερο.

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x], a_i \in \mathbb{Z}$$

Αν $p = \frac{k}{\lambda} \in \mathbb{Q}$ είναι ρίζα του $f(x)$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ μ.κ.σ. $(k, \lambda) = 1$

τότε k/a_0 και λ/a_n .

Αν $p = \frac{k}{\lambda} \in \mathbb{Q}$ είναι ρίζα του $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ όπου $a_n = \pm 1$,

τότε k/a_0 και $\lambda = 1$ μ.κ.σ. $(k, \lambda) = 1$

Βρείτε τις ρίζες του πολυνομού $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

Αν $p = \frac{k}{\lambda}$ είναι ρίζα του $f(x)$ με $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ και μ.κ.σ. $(k, \lambda) = 1$

τότε $k/24$ και $\lambda/1$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$k = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\} \quad \lambda = 1$$

Άρα αν $p \in \mathbb{Q}$ είναι ρίζα του $f(x)$, τότε $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

$$f(1) = 1 - 1 - 14 + 24 \neq 0$$

$$f(-1) = \dots \neq 0$$

$$f(2) = 8 - 4 - 28 + 24 = 32 - 32 = 0 \quad \text{Άρα το } 2 \text{ είναι ρίζα}$$

$$f(-2) = \dots$$

$$f(24) = \dots$$

$$\begin{array}{r|l} \text{2ος τρόπος: } x^3 - x^2 - 14x + 24 & (x-2) \\ -x^3 - 2x^2 & \\ \hline x^2 - 14x + 24 & \\ x^2 - 2x & \\ \hline -12x + 24 & \\ -12x + 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 =$$

$$(x-2)(x^2 + x - 12)$$

$$= (x-2)(x+4)(x-3)$$

Άρα ρίζες $x=2$ ή $x=-4$ ή $x=3$

► Βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $g(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7 \in \mathbb{R}[x]$

Λύση: Έστω $p = \frac{k}{\lambda} \in \mathbb{Q}$ ρίζα του $g(x)$ με $k \in \mathbb{Z}$ μ.κ.δ.(k, λ), $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\lambda \nmid -7 \Rightarrow k \in \{1, -1, 7, -7\}$$

$$\lambda \nmid 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Άρα } p \in \{1, -1, 7, -7\}$$

$$g(1) =$$

$$g(-1) =$$

$$g(7) = 0 \Rightarrow g(x) = (x-7)(h(x))$$

$$g(-7) =$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x^2 + x - 7 & x-7 \\ \hline x^3 - 7x^2 & x^2 + 1 \\ \hline 0 + x - 7 & \\ -x + 7 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα } g(x) = (x-7) \cdot (x^2+1)$$

Άρα το $g(x)$ έχει δύο μιγαδικές ρίζες πραγματικές
Αν $g(x) \in \mathbb{C}(x)$

$$g(x) = (x-7)(x^2+1) = (x-7)(x+i)(x-i)$$

Έχει τρεις μιγαδικές ρίζες $x=7$ ή $x=i$ ή $x=-i$

ΠΣΚΗΣΗ: Βρείτε

$$h(x) = 9x^3 + 3x^2 - 43x + 10$$

τις ρίζες του πολυωνύμου

Έστω ^{1ος}

$$p = \frac{\kappa}{\lambda} \in \mathbb{Q} \text{ ρίζα του } h(x) \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda \in \mathbb{N}$$

$$\kappa \nmid 10, \lambda \nmid 9$$

$$\mu.κ.δ(\kappa, \lambda) = 1$$

$$\kappa \in \{1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\}$$

$$\lambda \in \{1, 3, 9\}$$

$$\text{Άρα } p \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{5}{9}, \pm \frac{10}{9} \right\}$$

$$\left\{ \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{5}{9}, \pm \frac{10}{9} \right\}$$

1ος τρόπος: $h(1) = \dots$

$$h\left(-\frac{10}{9}\right) = \dots$$

Βρίσκω ρίζες ~~και~~ ^{τις} $-5, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$$\text{Άρα } h(x) = 9x^3 + 36x^2 - 43x + 10 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 5)$$

$$f: V \rightarrow W$$

$$[f]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$f: V \rightarrow V \quad n = \dim V$$

$$[f]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

$$\uparrow$$

$$f(\vec{a}_1) = \lambda_1 \vec{a}_1$$

$$f(\vec{a}_2) = \lambda_2 \vec{a}_2 \quad \vec{a}_n \neq 0$$

$$f(\vec{a}_n) = \lambda_n \vec{a}_n$$

Πρόβλημα: Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Υπάρχει βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ του V τέτοια ώστε $[f]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Πίνακας να είναι διαγώνιος;

Ορισμός: Έστω V ένας K -διασυστατικός χώρος και $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Ένα στοιχείο $\lambda \in K$ ονομάζεται ιδιοτιμή της f αν υπάρχει μη-μηδενικό $\vec{u} \in V$ τέτοιο ώστε $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. Στην περίπτωση αυτή το $\vec{u}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Παράδειγμα: Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$

Λύση: Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της f , τότε υπάρχει $(x,y) \neq (0,0)$ τέτοιο ώστε $f(x,y) = \lambda(x,y)$
 $(x+2y, 3x+2y) = (\lambda x, \lambda y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y = \lambda x \\ 3x+2y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 3x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

ομογενές σύστημα με δύο αγνώστους

Το σύστημα έχει ταυτόχρονα μια μη-μηδενική λύση $(x,y) \neq (0,0)$, άρα δεν είναι σύστημα Cramer.

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 2 = 0$$

$$f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -1$$

Άρα οι ιδιοτιμές της f είναι το 4 και το -1.

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 4$.

$$f(x,y) = 4(x,y) \Rightarrow (x+2y, 3x+2y) = (4x, 4y) \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Θεώρημα: Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ μια βάση του V . Ο πίνακας $[f]_\alpha$ είναι διαγώνιος αν και μόνο αν η βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη:

$$(\Rightarrow) \text{ Ο πίνακας } [f]_\alpha \text{ είναι διαγώνιος } [f]_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{a}_i) = 0 \vec{a}_1 + 0 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_i \vec{a}_i + \dots + 0 \vec{a}_n$$

$$f(\vec{a}_i) = \lambda_i \vec{a}_i$$

$\vec{a}_i$ είναι βεχίο της βάσης α άρα είναι διάφορο του μηδενός.

λ_i ιδιοτιμή

$\vec{a}_i$ ιδιοδιάνυσμα

$(\Leftarrow)$ $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα

$$f(\vec{a}_1) = \lambda_1 \vec{a}_1$$

$$f(\vec{a}_2) = \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$f(\vec{a}_n) = \lambda_n \vec{a}_n$$

$$[f]_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \overset{f(\vec{a}_2)}{\downarrow} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $f(\vec{a}_1)$ $\downarrow$ $f(\vec{a}_n)$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: V \rightarrow V$ λέγεται διαγωνίσιμη αν υπάρχει βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ του V τέτοια ώστε $[f]_\alpha$ να είναι διαγώνιος.

$$\begin{cases} x+2y=4x \\ 3x+2y=4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x+2y=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x - \frac{2}{3}y = 0$$

$$y = t, x = \frac{2}{3}t$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στον ιδιοτιμή $\lambda = 4$ είναι της μορφής $\left(\frac{2}{3}t, t \right)$ $t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Εξετάζω τώρα για ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στον ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

$$f(x, y) = -1(x, y) \Rightarrow (x+2y, 3x+2y) = (-x, -y)$$

$$(x, y) \neq (0, 0) \quad \begin{cases} x+2y = -x \\ 3x+2y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$$
~~$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$$~~

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} x+y &= 0 \\ x &= -t \\ y &= t \end{aligned}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στον ιδιοτιμή $\lambda = -1$ είναι της μορφής $(-t, t)$ $t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

► Να δείξετε ότι η αντιστροφή $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = (x, 2y, 3x+y)$ είναι διαγωνίσιμη.

$$\lambda = 4 \quad \left(\frac{2}{3}, 1, 1 \right) \quad t \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda = -1 \quad (-t, t) \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{για } t=1: \alpha = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1 \right), (-1, 1) \right\}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} + 1 \neq 0 \quad \text{r.A.}$$

$$[f]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \checkmark f(-1, 1) = (1, -1) \\ \uparrow \\ f\left(\frac{2}{3}, 1\right) = 4\left(\frac{2}{3}, 1\right) \end{matrix}$$

Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής μεταμόρφωσης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = (-y, x)$. Είναι η f διαγωνίσιμη;

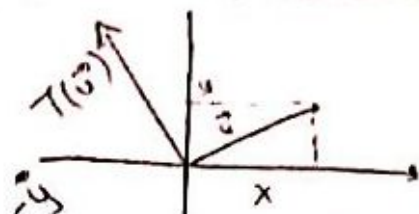
Λύση: Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της f . Τότε υπάρχει $(x,y) \neq (0,0)$ τέτοιο ώστε $f(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow (-y, x) = (\lambda x, \lambda y)$

$$\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ -x + \lambda y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ομογενές σύστημα δύο αγνώστων} \\ \text{με δύο εξισώσεις που έχει ταυτόχρονα} \\ \text{μία μη-τρίγωνη λύση} \end{matrix}$$

πα το σύστημα δεν είναι σύστημα. Cramer $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$
 $\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$ Άρα η f δεν έχει ιδιοτιμές, άρα δεν έχει και ιδιοδιανύσματα.

Άρα δεν είναι διαγωνίσιμη

$$T(x,y) = (-y,x)$$



εστιασμένη κατά 90 φορές

► Δείξτε ότι η $f(x,y) = (-y,x)$, $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ είναι διαγωνιστική.

Λύση. Έστω λ ιδιοτιμή $\Rightarrow f(x,y) = \lambda(x,y)$

$$\dots \dots \dots \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Ιδιοτιμές $\lambda = i$ και $\lambda = -i$

$$\nexists f(x,y) = i(x,y)$$

$$(-y,x) = (ix, iy)$$

$$-ix - y = 0$$

$$x - iy = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 + ir_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = it \\ y = t \end{array}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή i είναι της μορφής (it, t) $t \in \mathbb{C}$

Αντιστοιχα για ιδιοτιμή $-i$ $\dots \dots \dots \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - ir_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} x + iy = 0 \\ y = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -it \\ y = t \end{array}$$

Άρα τα διανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $-i$ είναι της μορφής $(-it, t)$ $t \in \mathbb{C}^*$. (1)